

SKRIVTID: 9-14. HJÄLPMEDEL: Formelsamling (delas ut) och miniräknare.

MOTIVERA alla lösningar noggrant.

För betygen 3, 4 respektive 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng. Varje uppgift är värd 8p.

1. (a) Bestäm $y = y(t)$, $t > 0$, så att $y(0-) = y'(0-) = 0$ och

$$y''(t) + a y'(t) + (2a - 4)y(t) = \delta(t)$$

- (b) För vilka reella a -värden försvinner ovanstående $y(t)$ då $t \rightarrow \infty$?

2. (a) Finn medelst Z -transformen en sluten formel för den funktion $y = y(n)$ på $\mathbb{N}$ som ges av

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 2, \quad y(n+2) = 4y(n+1) - 4y(n).$$

- (b) Bestäm Z -transformen av $(0, 0, 0, 2, 3, 4, \dots)$. (En sluten formel efterfrågas!)

3. (a) (5p) Beskriv funktionen
-

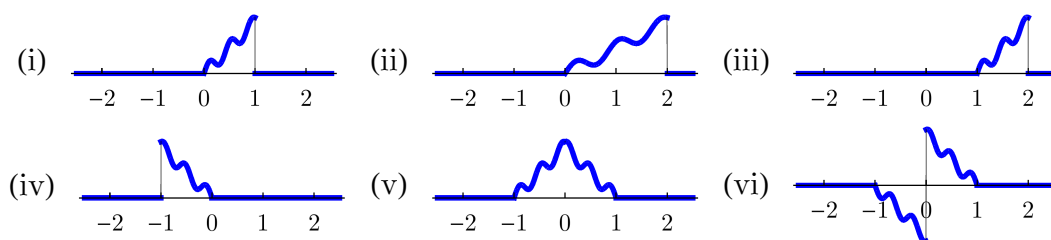
både med en 2-periodisk Fourierserie och en 4-periodisk cosinusserie.

- (b) (1p) Konvergerar någon av serierna snabbare än den andra? Argumentera!

- (c) (2p) beräkna $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)^2$ och $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2$.

4. (a) Av de sex funktionerna nedanför kallar vi den första för $f(t)$.

Uttryck Fouriertransformerna av de övriga fem i termer av $\hat{f}$.



4. (b) Vilken (vilka) av följande fyra grafer representerar Fouriertransformen av figur (vi)?

Glöm inte bort att motivera ditt svar!



5. Lös följande värmeledningsproblem för en cirkulär ring med omkretsen 1.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = \Lambda_{0,1}(x), \quad 0 < x < 1$$

SVAR

$$1. \quad (a) \quad y(t) = \begin{cases} t e^{-2t} & a = 4 \\ \frac{1}{a-4} (e^{-2t} - e^{(2-a)t}) & a \neq 4 \end{cases} \quad (b) \quad a > 2.$$

$$2. \quad (a) \quad 2^n, \quad (b) \quad \frac{2z-1}{(z-1)^2 z^2}.$$

$$3. \quad (a) \quad \frac{1}{2} + \sum_{n \neq 0} -\frac{i}{2n\pi} e^{i\pi n x} \quad \text{resp.} \quad \frac{1}{2} + \sum_{n > 0} \frac{2(1-(-1)^n)}{n^2 \pi^2} \cos\left(n \frac{\pi}{2} x\right) \quad (b) \quad \text{Den senare konvergerar snabbast.} \quad (c) \quad \frac{\pi^2}{8} \quad \text{resp.} \quad \frac{\pi^2}{6}.$$

$$4. \quad (a) \quad (ii) \quad f\left(\frac{t}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\hat{f}(2w), \quad (iii) \quad f(t-1) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-i w} \hat{f}(w), \quad (iv) \quad f(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(-w),$$

$$(v) \quad f(t+1) + f(-(t-1)) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{i w} \hat{f}(w) + e^{-i w} \hat{f}(-w)$$

$$(vi) \quad -f(t+1) + f(-(t-1)) \xrightarrow{\mathcal{F}} -e^{i w} \hat{f}(w) + e^{-i w} \hat{f}(-w)$$

(b) Den tredje.

5. T.ex.

$$u(x, t) = \frac{1}{2} - \sum_{n \text{ udda}} \frac{2}{n^2 \pi^2} e^{-(2\pi n)^2 t} e^{i 2\pi n x}$$

